*Разработчик:* Н.Л. Косырева

*Курс:* Элементы высшей математики

*Тема:* Исследование функции на монотонность и экстремумы

*Комментарий:*

Задание может быть предложено в двух вариантах в соответствии со способами предъявления результатов работы: алгоритм, составленный вербальными средствами, и алгоритм, составленный средствами блок-схемы.

**Вариант 1**

Нахождение интервалов монотонности и экстремумов функции позволяет исследовать функцию и построить ее график.

Прочитайте текст. Проанализируйте решение примера.

**Заполните пропуски в алгоритме исследования функции на монотонность и экстремумы.**

**Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы**

1. Находим область \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ функции ***f(x).***

2. Вычисляем \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ данной функции.

3. Находим точки, в которых \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ или \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

4. Делим область определения функции этими точками \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

5. Исследуем знак ***f ꞌ(x)*** на каждом интервале:

если \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, то на этом интервале \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_;

если \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, то на таком интервале \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

6. По рисунку знаков ***f ꞌ***, определяем точки \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ функции.

**Возрастание и убывание функции**

Пусть функция ***f (x)*** непрерывна на промежутке ***I*** и имеет внутри промежутка производную ***f ꞌ(x)***. Тогда:

1. Если ***f ꞌ(x)>0*** внутри промежутка ***I***, то функция ***f*** возрастает на промежутке ***I***.

2. Если ***f ꞌ(x)<0*** внутри промежутка ***I*** , то функция ***f*** убывает на промежутке ***I***.

В самом деле, ***f ꞌ(x)=tg α***, где ***α*** - угол между касательной к графику функции ***y= f(x)*** в точке с абсциссой ***x*** и положительным направлением оси ***Ox***. Но если ***f ꞌ(x)>0*** внутри промежутка ***I***, то всюду внутри него угол ***α*** острый, что может быть, только если функция возрастает на промежутке ***I*** (рис 1).



Рисунок 1

Подчеркнем, что при этом на концах промежутка ***I*** производная может быть равна нулю или не существовать.

Если же ***f ꞌ(x)<0*** внутри промежутка ***I***, то всюду внутри него угол ***α*** тупой, что может быть, но только если функция убывает на промежутке ***I.***



Рисунок 2

Приведенные здесь рассуждения не являются доказательством утверждений 1 и 2, они лишь дают представление о связи знака производной функции внутри промежутка ***I*** и поведения самой функции (убывания, возрастания) на промежутке ***I***.

Утверждения 1 и 2 являются следствиями следующей теоремы:

Пусть функция ***f(x)*** непрерывна на промежутке ***I*** и имеет производную ***f ꞌ(x)*** в каждой точке внутри промежутка ***I***. Тогда:

а) если ***f ꞌ(x)>0*** для каждого ***х*** внутри промежутка ***I***, то функция ***f (x)*** возрастает на промежутке ***I***;

б) если ***f ꞌ(x)<0*** для каждого ***x*** внутри промежутка ***I***, то функция ***f (x)*** убывает на промежутке ***I***;

в) если ***f ꞌ(x)=0*** для каждого ***x*** внутри промежутка ***I***, то функция ***f (x)*** постоянная (константна) на промежутке ***I***.

а) если ***f ꞌ(x)>0*** для всех ***x*** внутри промежутка ***I***, то ***f ꞌ(c)>0***, и тогда из равенства (1) следует, что,

***f(x2)*** ***>*** ***f (x1)*** (2)

Так как ***x1 и x2*** - любые точки промежутка ***I***, то неравенство (2) означает, что функция ***f*** возрастает на промежутке ***I***.

б) если ***f ꞌ(x)<0*** для каждого ***x*** внутри промежутка ***I***, то ***f ꞌ(c)<0***, и тогда из равенства (1) следует, что,

***f(x2)*** ***<*** ***f (x1)*** (3)

Так как ***x1 и x2*** - любые точки промежутка ***I***, то неравенство (3) означает, что функция ***f*** убывает на промежутке ***I***.

в) если ***f ꞌ(x)=0*** для всех ***x*** внутри промежутка ***I***, то ***f ꞌ(c)=0***, и тогда из равенства (1) следует, что,

***f(x2)*** = ***f (x1)*** (4)

Так как ***x1 и x2*** - любые точки промежутка ***I***, то неравенство (4) означает, что функция ***f (x)=С*** для всех ***х*** промежутка ***I***, где ***С*** = ***f(x1)***

Утверждения 1 и 2 позволяют определить, является ли критическая точка, в которой производная равна нулю, точкой локального максимума или точкой локального минимума.

Пусть функция ***f(x)*** имеет производную внутри промежутка ***I*** и критическая точка ***x0*** лежит внутри ***I***, тогда:

а) если в точке ***x0*** производная меняет знак с «+» на «-», то ***x0*** – точка локального максимума;

б) если в точке ***x0*** производная меняет знак с «-» на «+», то ***x0*** – точка локального минимума.

Рассмотрим случай «а». Действительно, так как производная слева от точки ***x0*** (в левой ее полуокрестности, то есть в интервале (***x0 – δ***; ***x0)*** где ***δ >*** 0 положительна, то функция возрастает на промежутке (***x0 – δ***; ***x0]***. Значит, в точке ***x0*** она принимает наибольшее значение среди всех значений в ее окрестности, т.е. точка ***x0*** - точка локального максимума.

Если обозначить возрастание функции знаком а убывание – знаком то схематически проведенное рассуждение можно изобразить так, как на рисунке 3.



Рисунок 3

Рассуждая аналогично, получим, что в случае «б» точка ***x0*** - точка локального минимума (рисунок 4)



Рисунок 4

**Пример:**

Найдем промежутки возрастания (убывания) и точки локального экстремума функции.

***f(x)=x3-6x2+9x-1***

Функция ***f(x)*** имеет производную для всех ***х ϵ R.***

Так как ***f ꞌ(x)=(х3-6х2+9х-1)ꞌ = 3х2-12х+9=3(х-1)(х-3),*** то:

***f ꞌ(x)=0*** при ***х=1*** и при ***х=3;***

***f ꞌ(x) >0*** при ***х ϵ (-∞; 1)*** и при ***х ϵ (3; +∞)***

***f ꞌ(x) <0*** при ***х ϵ (1; 3)***



Рисунок 5

По утверждениям 1 и 2 функция ***f(x)*** возрастает на каждом из промежутков ***(-∞; 1] и [3; +∞),*** убывает на промежутке ***[1;3]*** (рис. 5).

Следовательно, в точке ***х=1*** функция ***f(x)*** имеет локальный максимум, а точке ***х=3*** - локальный минимум.

Инструмент проверки

**Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:**

1. Находим область определения функции ***f(x)***.

2. Вычисляем производную ***f ꞌ(x)*** данной функции.

3. Находим точки, в которых ***f ꞌ(x)=0*** или не существует.

4. Делим область определения функции этими точками на интервалы.

5. Исследуем знак ***f ꞌ(x)*** на каждом интервале:

если ***f ꞌ(x) >0***, то на этом интервале ***f(x)*** возрастает;

если ***f ꞌ(x) <0***, то на таком интервале ***f(x)*** убывает.

6. По рисунку знаков ***f ꞌ***, определяем точки локального минимума и локального максимума функции.

|  |  |
| --- | --- |
| За каждый верно заполненный пропуск | 1 балл |
| ***Максимальный балл*** | ***11 баллов*** |

**Вариант 2**

Нахождение интервалов монотонности и экстремумов функции позволяет исследовать функцию и построить ее график.

Прочитайте текст. Проанализируйте решение примера.

**Заполните блок-схему алгоритма исследования функции на монотонность и экстремумы.**

**Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы**

**да**

**нет**

Источник аналогичен источнику в варианте 1.

Инструмент проверки

Находим область определения функции ***f(x)***

Вычисляем производную ***f ꞌ(x)***
данной функции

Находим точки, в которых ***f ꞌ(x)=0***
или не существует

Делим область определения функции этими точками на интервалы

Исследуем знак ***f ꞌ(x)*** на каждом интервале

***f ꞌ(x) >0***

на этом интервале ***f(x)***возрастает

на этом интервале ***f(x)***убывает

По рисунку знаков ***f ꞌ***, определяем точки локального минимума и локального максимума функции

**да**

**нет**