*Разработчик:* Н.Ш. Шарафутдинова

*Курс:* Математика

*Тема:* Дифференциальные уравнения: математический анализ.

*Специальность:*  34.02.01 Сестринское дело, 31.02.02 Акушерское дело,

31.02.01 Лечебное дело, 33.02.01 Фармация.

*Комментарии:* задание предлагается выполнить в начале работы по изучению нового материала для ознакомления, затем тот же источник может быть использован для формирования предметных результатов на практическом занятии по этой теме в процессе решения уравнений.

**Внимательно изучите текст.**

**Заполните схему «Виды дифференциальных уравнений и способы их решения».**

Дифференциальные уравнения

**Дифференциальные уравнения**

Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее значение производной функции с самой функцией, значениями независимой переменной, числами (параметрами). Порядок входящих в уравнение производных может быть различен (формально он ничем неограничен). Производные, функции, независимые переменные и параметры могут входить в уравнение в различных комбинациях или все, кроме хотя бы одной производной, отсутствовать вовсе.

Современные быстродействующие ЭВМ эффективно дают численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений, не требуя получения его решения в аналитическом виде. Это позволило некоторым исследователям утверждать, что решение задачи получено, если её удалось свести к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

Порядок, или степень дифференциального уравнения – наивысший порядок производных, входящих в него.

Решением (интегралом) дифференциального уравнения порядка n называется функция y(x), имеющая на некотором интервале (a,b) производные y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x) до порядка n включительно и удовлетворяющая этому уравнению. Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием. Задача об интегрировании дифференциального уравнения считается решённой, если нахождение неизвестной функции удается привести к квадратуре, независимо от того, выражается ли полученный интеграл в конечном виде через известные функции или нет.

Все дифференциальные уравнения можно разделить на обыкновенные (ОДУ), в которые входят только функции (и их производные) от одного аргумента, и уравнения с частными производными (УРЧП), в которых входящие функции зависят от многих переменных. Существуют также стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), включающие случайные процессы.

В зависимости от комбинаций производных, функций, независимых переменных дифференциальные уравнения подразделяются на линейные и нелинейные, с постоянными или переменными коэффициентами, однородные или неоднородные. В связи с важностью приложений в отдельный класс выделены квазилинейные (линейные относительно старших производных) дифференциальные уравнения в частных производных.

Важнейшим вопросом для дифференциальных уравнений является существование и единственность их решения. Разрешение этого вопроса дают теоремы существования и единственности, указывающие необходимые и достаточные для этого условия. Для обыкновенных дифференциальных уравнений такие условия были сформулированы Липшицем (1864). Для уравнений в частных производных соответствующая теорема была доказана С.В. Ковалевской (1874).

Решения дифференциальных уравнений подразделяются на общие и частные решения. Общие решения включают в себя неопределенные постоянные, а для уравнений в частных производных – произвольные функции от независимых переменных, которые могут быть уточнены из дополнительных условий интегрирования (начальных условий для обыкновенных дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий для уравнений в частных производных). После определения вида указанных постоянных и неопределенных функций решения становятся частными.

Поиск решений обыкновенных дифференциальных уравнений привёл к установлению класса специальных функций – часто встречающихся в приложениях функций, не выражающихся через известные элементарные функции. Их свойства были подробно изучены, составлены таблицы значений, определены взаимные связи и т.д.

Развитие теории дифференциальных уравнений позволило в ряде случаев отказаться от требования непрерывности исследуемых функций и ввести обобщённые решения дифференциальных уравнений.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) – это уравнения, зависящие от одной независимой переменной; они имеют вид

F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0\!илиF\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^{2}y}{\mathrm{d}x^2},...,\frac{\mathrm{d}^{n}y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0,

где ~y=y(x) – неизвестная функция (возможно, вектор-функция; в таком случае часто говорят о системе дифференциальных уравнений), зависящая от независимой переменной ~x, штрих означает дифференцирование по ~x.

Число ~n называется порядком дифференциального уравнения. Наиболее практически важными являются дифференциальные уравнения первого и второго порядка.

Порядком дифференциального уравнения называют наивысший порядок производной, входящей в данное уравнение.

Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка – класс дифференциальных уравнений первого порядка, наиболее легко поддающихся решению и исследованию. К нему относятся уравнения в полных дифференциалах, уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения первого порядка или нелинейные уравнения первого порядка. Все эти уравнения можно проинтегрировать в конечном виде.

Порядок уравнений в частных производных может определяется также, как для обыкновенных дифференциальных уравнений. Ещё одной важной классификацией уравнений в частных производных является их разделение на уравнения эллиптического, параболического и гиперболического типа, в особенности для уравнений второго порядка.

Как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных можно разделить на линейные и нелинейные. Дифференциальное уравнение является линейным, если неизвестная функция и её производные входят в уравнение только в первой степени (и не перемножаются друг с другом). Для таких уравнений решения образуют аффинное подпространство пространства функций. Теория линейных ДУ развита значительно глубже, чем теория нелинейных уравнений. Общий вид линейного дифференциального уравнения n-го порядка:

~p_{n}(x)y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x) y(x) = r(x),

где pi(x) – известные функции независимой переменной, называемые коэффициентами уравнения.

Функция r(x) в правой части называется свободным членом (единственное слагаемое, независящее от неизвестной функции) Важным частным классом линейных уравнений являются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Под классом линейных уравнений являются однородные дифференциальные уравнения – уравнения, которые не содержат свободного члена: r(x)=0. Для однородных дифференциальных уравнений выполняется принцип суперпозиции: линейная комбинация частных решений такого уравнения также будет его решением.

Все остальные линейные дифференциальные уравнения называются неоднородными дифференциальными уравнениями.

Нелинейные дифференциальные уравнения в общем случае не имеют разработанных методов решения, кроме некоторых частных классов. В некоторых случаях (с применением тех или иных приближений) они могут быть сведены к линейным.

*Использованные источники:*

[Арнольд В.И.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B4,_%D0%92%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%BC%D0%B8%D1%80_%D0%98%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87) Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1966.

Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1970.

Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.- М.: Физматлит, 2005.

[Понтрягин Л.С.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BD%D1%82%D1%80%D1%8F%D0%B3%D0%B8%D0%BD,_%D0%9B%D0%B5%D0%B2_%D0%A1%D0%B5%D0%BC%D1%91%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87) Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.:Наука,1974.

[Тихонов А.Н.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B8%D1%85%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B5%D0%B9_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87), Васильева А.Б., [Свешников А.Г.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B2%D0%B5%D1%88%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B5%D0%B9_%D0%93%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B3%D0%B8%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87) Дифференциальные уравнения.-4-еизд.- Физматлит, 2005.

[Филиппов А.Ф.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%BB%D0%B8%D0%BF%D0%BF%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B5%D0%B9_%D0%A4%D1%91%D0%B4%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87_(%D1%83%D1%87%D1%91%D0%BD%D1%8B%D0%B9)) [Введение в теорию дифференциальных уравнений](http://urss.ru/cgi-bin/db.pl?lang=Ru&blang=ru&page=Book&id=47764&list=6).-Изд.2-е.-2007.-240с.-[ISBN5354004160](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F:%D0%98%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8_%D0%BA%D0%BD%D0%B8%D0%B3/5354004160).

Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни. Дифференциальные уравнения и проблема собственных значений: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB=Differential Equationsand Boundary Value Problems: Computingand Modeling. - 3-еизд. - М.: [«Вильямс»](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%92%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D1%8F%D0%BC%D1%81_(%D0%B8%D0%B7%D0%B4%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE)&action=edit&redlink=1), 2007. - [ISBN978-5-8459-1166-7](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F:%D0%98%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8_%D0%BA%D0%BD%D0%B8%D0%B3/9785845911667).

Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1969.

Инструмент проверки

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные   
уравнения I порядка

Дифференциальные   
уравнения II порядка

Обыкновенные

С разделяющимися переменными

Линейные

Однородные

Неоднородные

|  |  |
| --- | --- |
| За каждую верно заполненную ячейку (порядок строк произвольный) | 1 балл |
| ***Максимальный балл*** | ***7 баллов*** |