ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА
«Практическая математика»

Номинация: углубление отдельных тем обязательных предметов федерального компонента и обязательных предметов по выбору

Автор программы:
Атеева Ирина Валерьевна,
учитель математики Муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения средняя общеобразовательная школа № 78 имени Героя Советского Союза П.Ф. Ананьева городского округа Самара

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К ПРОГРАММЕ

Элективный курс представляет собой *углубление отдельных тем обязательных предметов федерального компонента и обязательных предметов по выбору*.

Цель – научить решать задачи повышенного уровня сложности, содержащие абсолютную величину и параметр.

Предлагаемый курс содержит не проработанные в базовом курсе школьной математики вопросы и своим содержанием является хорошим дополнением для подготовки учащихся к обучению в высшем учебном заведении. В процессе обучения учащиеся овладевают приемами нестандартного подхода к решению уравнений и неравенств с одной переменной. Данный курс согласуется с запросами учащихся по овладению системой математических знаний, необходимых для будущей профессиональной деятельности.

Планируемые образовательные результаты:

- решают линейные, квадратные, дробно-рациональные уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля;
- подбирают корни многочлена по теореме Безу;
- решают задачи методом неопределенных коэффициентов;
- решают алгебраические уравнения третьей и четвертой степени;
- решают симметрические и возвратные уравнения;
- решают уравнения с параметром;
- решают неравенства с параметром;
- решают уравнения и неравенства, содержащие модуль и параметр.

Оценка планируемых образовательных результатов

Оценка накопительная по итогам освоения каждой темы на основе текущей оценки выполнения заданий. По каждому результату делается вывод о том, достигнут он или нет. курс считается освоенным, если освоены более половины образовательных результатов.

Организация освоения содержания

Освоение содержания организовано через введение алгоритмов, демонстрацию, в затем решение уравнений и неравенств по теме. Учащиеся получают задания для самостоятельной работы для закрепления материала. Учебные материалы к элективному курсу представлены в Приложении 1.

Требования к ресурсам

Организационные ресурсы

Особых требований нет.

Дидактические ресурсы

Учебные материалы к элективному курсу / Сост. Атеева И.В. – Самара, 2015. – На правах рукописи. (См. Приложение 1.)

Материальные ресурсы:

Особых требований нет.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тема 1. Модуль. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестные под знаком модуля

Уравнения, содержащие неизвестные под знаком модуля. Уравнения с одной переменной вида $|f(x)| = a$, $f(|x|) = g(x)$.

Практическая деятельность

Решение уравнений вида $|f(x)| = g(x)$. Решение уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|$ Решение уравнений вида $|f_1(x)| + |f_2(x)| + |f n(x)| \ldots + = g(x)$. Решение неравенств вида $|f(x)| \leq a$ *и* $|f(x)| \geq a$. Графическое решение уравнений.

Тема 2. Решение алгебраических уравнений

Теорема Безу. Деление многочленов. Метод неопределенных коэффициентов. Метод введения параметра. Замена переменных в уравнениях и системах уравнений.

Практическая деятельность

Решение алгебраических уравнений.

Тема 3. Симметрические и возвратные уравнения

Симметрические уравнения. Возвратные уравнения. Уравнения четвертой степени с дополнительными условиями на коэффициенты. Использование монотонности при решении уравнений.

Практическая деятельность

Решение систем уравнений.

Тема 4. Способы решения уравнений

Угадывание корня уравнения. Решение иррациональных уравнений. Использование симметричности уравнения.

Практическая деятельность

Решение уравнений разными способами.

Тема 5. Решение неравенств

Обобщенный метод интервалов для решения неравенств, содержащих модуль.

Практическая деятельность

Решение неравенств, содержащих модуль.

Тема 6. Решение заданий с параметром

Уравнения с параметрами. Алгоритм решения уравнений с параметром. Неравенства с параметрами. Метод интервалов для решения квадратных неравенств с параметром. Графические интерпретации уравнений и неравенств с параметром. Исследовательские задачи с параметром

Практическая деятельность

Решение уравнений с параметрами. Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль и параметр.

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

№	Тема	кол-во часов			
		всего	аудиторн ых	из них на практ. деят.	на самост. работу
1	Модуль. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестную под знаком модуля	9	7	5	2
2	Решение алгебраических уравнений	7	5	4	2
3	Симметрические и возвратные уравнения	6	4	3	2
4	Способы решения уравнений	6	4	3	2
5	Решение неравенств	7	5	4	2
6	Решение заданий с параметром	11	9	8	2
ИТОГО		46	34	27	12

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика. Подготовка к ЕГЭ: Учебно-методический комплекс / Под ред. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2015. (Задания 15 и 18 второй части.)
2. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗЫ / Под редакцией М.И.Сканави- М.: Просвещение, 2006. (Часть 1, главы 1-9.)
3. Различные издания ФИПИ для подготовки к Единому Государственному Экзамену (Задания 15 и 18 второй части).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ КУРСА

Задачи по теме «Модуль. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестные под знаком модуля»

1. Решите уравнение (неравенство):

а) $|x| = x;$ г) $|x| < -x;$

б) $|x| = -x;$ д) $|x| \le x;$

в) $|x| > x;$ е) $|x| \le -x.$

2. Решите уравнение (неравенство):

а) $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$;

б) $|x^3 - 4x| = 4x - x^3$;

в) $|x(x-1)| > x(1-x)$;

г) $|(x-1)(x-2)(x-3)| \le (1-x)(2-x)(3-x)$.

3. Решите уравнение (неравенство), используя геометрический смысл модуля:

а) $|x-3| = 5;$ з) $|x-1| + |x+3| = 5;$

б) $|x+5| = 7;$ и) $|x+4| + |5-x| = 9;$

в) $|-x-2| = 2;$ к) $|x-3| + |x+1| \ge 5;$

г) $|3x-5| = 4;$ л) $|1+2x| + |1-2x| < 4;$

д) $|x+7| \ge 8;$ м) $|x+1| + |x+2| > 1;$

е) $|3-x| < 1;$ н) $|x-1| = 2|x+2|;$

ж) $|2x+5| > 3;$ о) $|x-3| \le |x-5| = 5;$

п) $|x+1| = |2x+3|;$

р) $|x^2 - x - 4| + |x^2 - x - 10| = 10;$

с) $|x^2 - x - 3| + |x^2 - x - 11| \le 10.$

4. Решите уравнение (неравенство) методом интервалов:

а) $7|2-3x| - 2|3x-1| = 4 + 3x;$

б) $|x-3| + |1-2x| \ge x + |x+1|;$

в) $\left|x^2 - x\right| = \left|x - 3\right| + 1;$

г) $\left|x^2 + 2x\right| - \left|2x + 1\right| > x^2 - x.$

5. Решите уравнение (неравенство), используя замену переменной:

а) $\dfrac{2|x-1|-1}{3|x-1|-2} = 1;$

б) $\left(|x| - 5\right)\left(|x| - 7\right) \geq 0;$

в) $\dfrac{x^2 + |x-3| - 1}{3} = 2x + 1;$

г) $\dfrac{x^2 - 3|x-1| - 2x + 3}{(x-1)^2 - 5|x-1| + 6} \leq 0.$

6. Решите уравнение (неравенство), используя равносильные преобразования:

а) $|3x - 2| = |2x - 3|;$

б) $|x + 1| > |3 - 2x|;$

в) $\left|x^2 - 5x\right| = 5x - 9;$

г) $|2x - 5| = 4 - 7x;$

д) $\left|x^2 - 9x - 8\right| = 9x - 8;$

е) $\left|x^2 - 4x - 2\right| = x^2 + 2x + 2;$

ж) $|2 - 5x| \leq 3x - 1;$

з) $\left|\dfrac{4x-3}{3x-4}\right| < \dfrac{1}{4-3x};$

и) $\left|\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 2x - 3}\right| \leq 1;$

к) $|5x + 3| > |5 - 3x|;$

л) $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| \geq \dfrac{x-1}{x};$

м) $\left|x^3 + 2x - 1\right| \geq x^3 + 1;$

н) $|2x - 3| + |3x - 4| = |5x - 7|;$

о) $|7x - 5| + |5x + 6| > |2x - 11|;$

п) $\left|3x^2 - 8x + 4\right| + \left|2x^2 - 5x + 2\right| \leq \left|x^2 - 3x + 2\right|.$

Ответы для самоконтроля:

1. а) $x \geq 0$; б) $x \leq 0$; в) $x < 0$; г) $x > 0$; д) $x \geq 0$; е) $x \leq 0$. 2. а) $(-\infty;0] \cup [2;\infty)$; б) $(-\infty;-2] \cup [0;2]$; в) $(-\infty;0) \cup (1;\infty)$; г) $(-\infty;1] \cup [2;3]$. 3. а) $\{-2;8\}$; б)

$\{-12;2\}$; в) $\{-4;0\}$; г) $\left\{\frac{1}{3};3\right\}$; д) $(-\infty;-15]\cup[1;\infty)$; е) $(2;4)$; ж) $(-\infty;-4)\cup(-1;\infty)$; з) $\{-3,5;1,5\}$; и) $[-4;5]$; к) $(-\infty;-1,5]\cup[3,5;\infty)$; л) $(-1;1)$; м) $(-\infty;-2)\cup(-1;\infty)$; н) $\{-5;-1\}$; о) $(-\infty;4]$; п) $\left\{-2;-\frac{4}{3}\right\}$; р) $\{-3;-1;2;4\}$; с) $[-3;-1]\cup[2;4]$. 4. а) $\left\{\frac{2}{5};\frac{4}{3}\right\}$; б) $(-\infty;1]\cup[5;\infty)$; в) $\{-2;2\}$; г) $(1;\infty)$. 5. а) $\{-1;1\}$; б) $(-\infty;-7]\cup[-5;5]\cup[7;\infty)$; в) $\{0;6\}$; г) $[-2;-1]\cup(-1;0]\cup[2;3)\cup(3;4]$. 6. а) $\{-1;1\}$; б) $\left(\frac{2}{3};4\right)$; в) $\{-3;1;3;9\}$; г) $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$; д) $\{4;18\}$; е) $\left\{-\frac{2}{3};0;1\right\}$; ж) $\left[\frac{3}{8};\frac{1}{2}\right]$; з) $\left(\frac{1}{2};1\right)$; и) $\left[-1;\frac{3}{5}\right]\cup\left[\frac{3}{2};\infty\right)$; к) $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$; л) $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$; м) $(-\infty;0]\cup[1;\infty)$; н) $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2};\infty\right)$; о) $\left(-\infty;-\frac{6}{5}\right)\cup\left(\frac{5}{7};\infty\right)$; п) $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]\cup\{2\}$.

Задания по теме «Решение алгебраических уравнений»

1. Сократить дробь: $\frac{x^3-8}{x^3-6x^2+12x-8}$.

2. Выделить целую часть: а) $\frac{x^4-3x+3}{x+2}$; в) $\frac{x^5-2}{x^3+x+1}$.

3. Решить уравнения с помощью теоремы Безу:

а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$,
в) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$,
с) $x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 17x + 26 = 0$.

4. Сократить дробь: $\frac{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}{x^3 + 27}$.

5. Выделить целую часть: а) $\frac{x^4 + 5x - 2}{x - 3}$; в) $\frac{x^5 + 4}{x^3 - 2x + 1}$.

6. Решить уравнения с помощью теоремы Безу:

а) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$,
в) $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$,
с) $x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 16x + 20 = 0$.

Задачи по теме «Симметрические и возвратные уравнения»

1. Решить возвратные уравнения:
   a) $4x^3 – 5x^2 – 5x + 4 = 0$,
   b) $3x^4 + 5x^3 – \frac{1}{4}x^2 + 5x + 3 = 0$.
   c) $5x^3 – 4x^2 – 4x + 5 = 0$,
   d) $2x^4 – 5x^3 + 4x^2 – 5x + 2 = 0$.
2. Решить однородные уравнения:
   a) $3(x^2 – 5)^2 + 4(x^2 – 5)(x + 7) – 7(x + 7)^2 = 0$,
   b) $(x – 2)^4 + 5(x + 2)^4 = 6(x^2 – 4)^2$.
   C) $3(x^2 + 5)^2 + 4(x^2 + 5)(x – 7) – 7(x – 7)^2 = 0$,

D) $(x-3)^4 + 4(x + 3)^4 = 5(x^2 – 9)^2$.

3. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x + y = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x^2 – 7xy + 2y^2 = 0, \\ 3x^2 + y^2 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x2 + y2 + 3xy = 31, \\ xy = 6. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x2 - xy + y2 = 21, \\ x + y = 9; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x2 – 9xy + 5y2 = 0, \\ 5x2 + 2y2 = 7; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x2 + y2 + 5xy = 60, \\ xy = 8. . \end{cases}$

Задачи по теме «Способы решения уравнений»

Задание 1. Решить уравнение

а) $x(x – 1)(x – 2)(x – 3) = 24$; Ответ: 4; -1.

б) $2x^4 + 3x^3 – 3x^2 – 3x + 2 = 0$; Ответ: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $x_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

в) $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0$; Ответ: не имеет корней.

г) $x^8 – x^6 + x^4 – x^2 + 1 = 0$; Ответ: нет решений.

д) $x^9 + x^6 = 0$; Ответ: 0; -1.

е) $4x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 9x + 2 = 0$; Ответ: $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = -2$, $x_{4,5} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2})$.

ж) $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0$; Ответ: -1; $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

и) $(x^2 + 2x - 5)^2 + 2(x^2 + 2x - 5) - 5 = x$; Ответ: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x_3 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, $x_4 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

к) $x^3 + 2x^2 - 7x - 12 = 0$; Ответ: -3; $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

л) $3x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 4x + 12 = 0$; Ответ: 1; 2.

м) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$; Ответ: 2; 4; -1; $-\frac{1}{2}$.

н) $x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0$; Ответ:(t; t), где t- любое действительное число.

о) $2x^3 - 5x^2y + 2xy^2 = 0$. Ответ: (0; t), (t; 2t), (2t; t), где t – любое действительное число

Задание 2. Решить систему уравнений

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - 4xy - 4x + 3y + 5 = 0; \end{cases}$ Ответ:(2; 1), $(1 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^4 + 6x^2y + 8y^2 = 0; \end{cases}$ Ответ: (2;-1), (-6; -9), $(-1 + \sqrt{7}; -4 + \sqrt{7})$, $(-1 - \sqrt{7}; -4 - \sqrt{7})$.

в) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ x^2y + xy^2 = -6; \end{cases}$ Ответ: (3; -2), (-2; 3).

г) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5; \end{cases}$ Ответ: (1; 2), (2; 1).

д) $\begin{cases} x4 + x2y2 + y4 = 91, \\ x2 + xy + y2 = 13; \end{cases}$ Ответ: (3; 1),(1; 3),(-3; - 1), (- 1; - 3).

е) $\begin{cases} x3 + y3 = 9a3, \\ x2y + xy2 = 6a3; \end{cases}$ Ответ: если a =0, то решением системы будут пара чисел вида (t; t), где t –любое действительное число; если a $\neq$ 0, то решения: (a;2a), (2a; a).

ж) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x2 + y2 + xy = 13; \end{cases}$ Ответ:(1; 3), (3; 1).

з) $\begin{cases} x4 + y4 = 17, \\ x2 + y2 = 5; \end{cases}$ Ответ: (1; 2), (-1; -2), (-1; 2), (2; 1), (-2; -1), (-2; 1), (2; -1).

и) $\begin{cases} y - x = 2, \\ 2x3y + 9x2y - 5xy = 0. \end{cases}$ Ответ: (- 5; - 3), (0,5; 2,5), (0; 2), (-2;0).

Задание 3. Решить уравнения.

$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4.$

$\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}=5.$

$7\sqrt{x-9}+\sqrt{x+24}=35.$

$\sqrt[5]{x-7}+\sqrt[5]{2x+16}=3.$

$5\sqrt{2x+5}+\sqrt{7x-10}=17.$

$3\sqrt{4x+10}+\sqrt{14x+5}=8\sqrt{3}.$

$5\sqrt{x+10}+\sqrt{3{,}5x-20}=17\sqrt{2}.$

$\sqrt{2x+11}+\sqrt{4x+29}=4.$

$\sqrt{3x-8}+\sqrt{2}\sqrt{x+10}=10.$

$\sqrt{9x+31}+\sqrt{x+3}=2\sqrt{-x-2}.$

$\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+22}=3$.

$\sqrt{3x+15}+\sqrt{5x+26}=7$.

. $\sqrt{|x^2+14x+47|-1}=|x+7|-1.$

. $\sqrt{2x^2-8x+9}=x-1.$

. $\sqrt{2x^2-21x+4}=2-x$.

. $\sqrt{2x^2-27x+45}=9-x.$

. $\sqrt{8x^2+18x+8}=-2x-2$.

. $\sqrt{8x^2+9x+2}=-2x-1$.

Задачи по теме «Решение неравенств»

1. Решить неравенства:

а) $\dfrac{(x^2-16)(x+5)}{x^2-5x+4}\geq 0$,

б) $\left|\dfrac{x-4}{x+2}\right|<5.$

2. Изобразить на плоскости множество решений неравенства:

а) 2x – 5y + 10 < 0,

б) xy > –6.

3. Решить неравенства:

а) $\dfrac{(x^2-25)(x+3)}{x^2-4x-5}\leq 0$,

б) $\left|\dfrac{x+3}{x-5}\right|<4.$

4. Изобразить на плоскости множество решений неравенства:

а) 3x + 2y – 8 > 0,

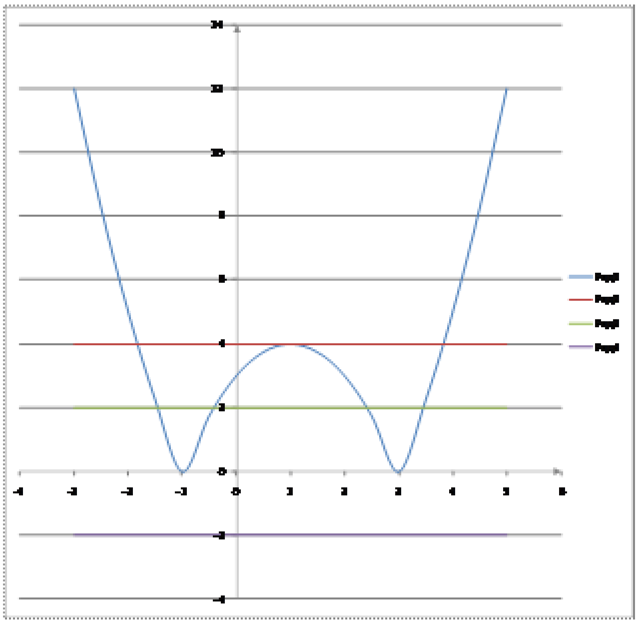
б) xy < –8.

Задачи по теме «Решение заданий с параметром»

1. **Решить уравнение** $|x^2-\mathbf{2}x-\mathbf{3}|=a$ **.**

Решение.

Рассмотрим функции $y=|x^2-2x-3|$ и $y=a$.



При $a<0$ нет решений;
при $a=0$ и $a>4$ два решения;
при $0<a<4$ - четыре решения;
при $a=4$ - три решения.

Ответ:
при $a<0$ нет решений;
при $a=0$ и $a>4$ два решения;
при $0<a<4$ - четыре решения;
при $a=4$ - три решения.

2. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-(a+2)x+2a\right|=|3x-6|$$

имеет ровно два корня. Если таких значений a больше одного, в ответе укажите их произведение.

Решение.

Разложим квадратный трехчлен $x^2-(a+2)x+2a$ на множители.

$D=(a+2)^2-8a=a^2+4a+4-8a=a^2-4a+4=(a-2)^2$;

$$x_{1,2}=\frac{a+2\pm(a-2)}{2};$$

$x_1=a;\ \ x_2=2$;

$x^2-(a+2)x+2a=(x-2)(x-a)$;

Получим $|(x-2)(x-a)|=3|x-2|$.

Это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ |x-a|=3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x-a=3, \\ x-a=-3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=a+3, \\ x=a-3; \end{array}\right.$$

Поэтому данное уравнение имеет ровно два корня, если $a+3=2$ и $a-3=2$.

Отсюда находим, что искомыми значениями a являются $a_1=-1;\ a_2=5$

$a_1 \cdot a_2 = -5$.

Ответ: -5.

3. Найти все значения a, при которых корни уравнения $ax^2 - 2(a+1)x - a + 5 = 0$ **положительны.**

Решение.

Контрольная точка $a = 0$, т.к. меняет суть уравнения.

1. $a = 0$ $-2x + 5 = 0$;

$x = \frac{5}{2} > 0$.

2. $a \neq 0$

$$\begin{cases} D_1 \geq 0, \\ x_1 x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0. \end{cases}$$

$D_1 = (a+1)^2 - a(-a+5) = 2a^2 - 3a + 1 = (a-2)(a-1)$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-a+5}{a}$, $x_1 + x_2 = \frac{2(a+1)}{a}$.

Получим $\begin{cases} (a-1)(a-2) \geq 0, \\ \frac{-a+5}{a} > 0, \\ \frac{2(a+1)}{a} > 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \leq 1, \\ a \geq 2, \end{array}\right. \\ 0 < a < 5, \\ \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$a \in (0;1] \cup [2;5)$.

Ответ: $a \in [0;1] \cup [2;5)$

4. Указать при каких значениях параметра a система уравнений имеет два решения.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x|x|} \\ y + 2a + 2(x-a)^2 = x + 4 \end{cases}$$

Решение.

Если $x < 0$, $y = \sqrt{x|x|} = \sqrt{-x^2}$ - не имеет смысла.

Поэтому, ОДЗ $x \geq 0$.

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y = x, \\ x + 2a + 2(x-a)^2 = x + 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y = x, \\ x + 2a + 2x^2 - 4ax + 2a^2 - x - 4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y = x, \\ x^2 - 2ax + a + a^2 - 2 = 0; \end{cases}$$

$x^2 - 2ax + a + a^2 - 2 = 0$;

$D_1 = a^2 - a - a^2 + 2 = 2 - a$;

Т.к. $x \ge 0$, то корни могут оба положительные или один положительный, а другой равен 0.

1. Если корни положительные, то

$$\begin{cases} 2 - a > 0, \\ a^2 + a - 2 > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 2, \\ (a-1)(a+2) > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 2, \\ \left[\begin{array}{l} a < -2, \\ a > 1, \end{array}\right. \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 2, \\ a < -2, \\ a > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a < 2, \\ a > 1, \\ a > 0; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow 1 < a < 2$$

$a \in (1;2)$.

2. Если $x_1 > 0;\ x_2 = 0,$ то

$$\begin{cases} 2 - a > 0, \\ a^2 + a - 2 = 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 2, \\ (a-1)(a+2) = 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2, \\ \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -2, \end{array}\right. \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 2, \\ a = 1, \\ a. > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a < 2, \\ a = -2, \\ a > 0; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow a = 1 .$$

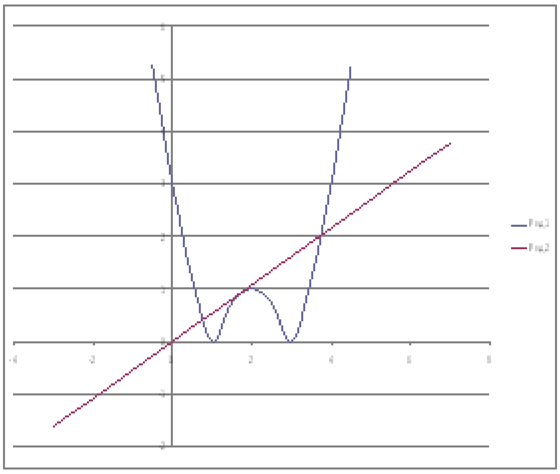
Объединяя решения п.1 и п.2, получим $a \in [1;2)$

Ответ: $a \in [1;2)$

5. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2-4x+3|=ax$ имеет 3 корня.

Решение.

Построим графики функций $y=|x^2-4x+3|$ и $y=ax$.



На отрезке [1; 3] построен график функции $y=-x^2+4x-3$.

Данное уравнение будет иметь три корня, если график функции $y=ax$ будет являться касательной к графику $y=-x^2+4x-3$ на отрезке [1; 2].

Уравнение касательной имеет вид $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,

$y=(-x_0^2+4x_0-3)+(-2x_0+4)(x-x_0)$

$y=-x_0^2+4x_0-3-2x_0x+4x+2x_0^2-4x_0$

$y=(-2x_0+4)x+(x_0^2-3)$

Т.к. уравнение касательной $y=ax$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}-2x_0+4=a,\\ x_0^2-3=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_0=\pm\sqrt{3},\\ a=4\pm2\sqrt{3}.\end{cases}$$

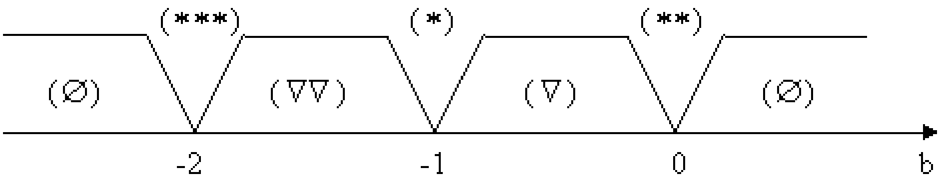
Т.к. $x_0\in[1;2]$, $\begin{cases}x_0=\sqrt{3}\\ a=4-2\sqrt{3}.\end{cases}$

Ответ: при $a=4-2\sqrt{3}$.

6. Решите уравнение $\sin(-x^2+2x-1)=b+1$.

Решение.

$O.O.У.\begin{cases}b\in R\\ x\in R.\end{cases}$



Учитывая нечетность функции $y=\sin x$, данное уравнение сведем к ему равносильному $\sin(x-1)^2=-b-1$.

1. b = -1; $\sin(x-1)^2 = 0$,

$(x-1)^2 = \pi k, k \in N \cup \{0\}$,

$x - 1 = \pm\sqrt{\pi k}, k \in N \cup \{0\}$,

$x = 1 \pm \sqrt{\pi k}, k \in N \cup \{0\}$. (*)

2. b = 0; $\sin(x-1)^2 = -1$,

$(x-1)^2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in N$,

$x = 1 \pm \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, n \in N$. (**)

3. b = -2; $\sin(x-1)^2 = 1$,

$(x-1)^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in N \cup \{0\}$,

$x = 1 \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi m}, m \in N \cup \{0\}$. (***)

4. $|b+1| > 1$: $\left[\begin{array}{l} b > 0, \\ b < -2. \end{array}\right.$ Решений нет.

5. $b \in (-1;0)$; $-1 < -b-1 < 0$,

$(x-1)^2 = (-1)^l \arcsin(-b-1) + \pi l, l \in N$,

$x = 1 \pm \sqrt{(-1)^l \arcsin(-b-1) + \pi l}, l \in N$, ($\nabla$)

6. $b \in (-2;-1)$; $0 < -b-1 < 1$,

$(x-1)^2 = (-1)^c \arcsin(-b-1) + \pi c, c \in N \cup \{0\}$,

$x = 1 \mp \sqrt{(-1)^{c+1} \arcsin(b+1) + \pi c}, c \in N \cup \{0\}$. **($\nabla\nabla$)**

1. Решите неравенство $|\mathbf{x} - \boldsymbol{a}| + |\mathbf{x} + \boldsymbol{a}| < \boldsymbol{в}$ при всех значениях $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{и}$ $\boldsymbol{в}$.Решение.

Воспользуемся последовательно 2 раза условием равносильности:

$$\begin{cases} x - a < b - |x+a|, \\ x - a > |x+a| - b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+a| < b + a - x, \\ |x+a| < x - a + b \end{cases}; \Leftrightarrow \begin{cases} x + a < b + a - x, \\ x + a > x - b - a, \\ x + a < x - a + b, \\ x + a > -x + a - b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x < b, \\ 2a > -b, \\ 2a < b, \\ 2x > -b; \end{cases} \begin{cases} x < \frac{b}{2}, \\ a > -\frac{b}{2}, \\ a < \frac{b}{2}, \\ x > -\frac{b}{2}; \end{cases} \begin{cases} -\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2}, \\ -\frac{b}{2} < a < \frac{b}{2}; \end{cases} \begin{cases} b > 0, \\ x \in \left(-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right), \\ |a| < \frac{b}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x < в, \\ 2a > -в, \\ 2a < в, \\ 2x > -в; \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{в}{2}, \\ a > -\frac{в}{2}, \\ a < \frac{в}{2}, \\ x > -\frac{в}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{в}{2} < x < \frac{в}{2}, \\ -\frac{в}{2} < a < \frac{в}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} в > 0, \\ x \in (-\frac{в}{2}; \frac{в}{2}) \\ |a| < \frac{в}{2} \end{cases}$$

Если $|a| < \frac{в}{2}$, *то* $x \in (-\frac{в}{2}; \frac{в}{2})$; *при* $|a| \ge \frac{в}{2}$ *решений нет.*

Если $|a| < \frac{b}{2},$ то $x \in \left(-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right);$ при $|a| \ge \frac{b}{2}$ решений нет.

8.Найдите все значения параметра ?, при каждом из которых среди решений неравенства $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ нет ни одной точки отрезка [7;9,6].

Решение.

Сначала решим неравенство при всех значениях параметра, а потом найдем те из них, для которых среди решений нет ни одной точки отрезка **[7;9,6].**

Пусть $t = \sqrt{ax}$, $\begin{cases} ax = t^2 \\ t \ge 0 \end{cases}$ При такой замене переменных ОДЗ неравенства выполняется автоматически. X можно выразить через t, если $a \neq 0$. Поэтому случай, когда $a = 0$, рассмотрим отдельно.

1.Пусть $a = 0$, тогда x>0, и заданный отрезок является решением.

2.Пусть $a \neq 0$, тогда $x = \frac{t^2}{a}$ и неравенство $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ примет вид

$$\frac{t^2}{a} + 4a > 5t$$

$$\frac{t^2 - 5at + 4a^2}{a} > 0$$

Решение неравенства зависит от значений a, поэтому придется рассмотреть два случая .

1). Если ?>0, то $t^2 - 5at + 4a^2 > 0 \quad при \quad t \in [0;a) \cup (4a;\infty)$, или в старых переменных, $\left[\begin{array}{l} 0 \le \sqrt{ax} < a, \\ \sqrt{ax} > 4a. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 0 \le x < a, \\ x > 16a. \end{array}\right.$

Решение не содержит ни одной точки заданного отрезка $[7;96]$, тогда и только тогда, когда выполнены условия $\begin{cases} a \le 7, \\ 16a \ge 96. \end{cases}$ Отсюда, $a \in [6;7]$.

2). Если a<0, то $\dfrac{t^2 - 5at + 4a^2}{a} > 0 \ ; \ t^2 - 5at + 4a^2 < 0 \ ; \ t \in (4a, a)$

Так как $t \ge 0$, то решений нет.

Ответ: $[6;7]$.

9. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $8\sin^3 x = p + 9\cos 2x$ не имеет решений.

Решение.

Выразим cos 2x через sinx.

$8\sin^3 x = p + 9(1 - 2\sin^2 x)$

$8\sin^3 x + 18\sin^2 x - 9 = p$

Пусть $t = \sin x, \quad t \in [-1;1],$ тогда задача свелась к нахождению всех значений p,при которых уравнение $8\sin^3 x + 18\sin^2 x - 9 = p$ не имеет решений на $[-1;1]$.Уравнение алгоритмически не решается, поэтому решим задачу, используя график. Запишем уравнение в виде $8\sin^3 x + 18\sin^2 x = 9 + p$, и теперь эскиз графика левой части $y = 8t^3 + 18t^2$ строится несложно.

Уравнение не имеет решений, если прямая $y = p + 9$ не пересекает график на отрезке $[-1;1]$, т. е. $\left[\begin{array}{l} p + 9 > 26, \\ p + 9 < 0. \end{array}\right.$ $p \in (-\infty;-9) \cup (17;+\infty).$

Ответ: $p \in (-\infty;-9) \cup (17;+\infty).$